الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : علو م تجريبية

الإختبار التجريبي رقم 08 شعبة علوم (Bac 2022)

التمرين 01 (4 نقاط) — 28 دقيقة

في كل سؤال يوجد إقتراح واحد صحيح عينه مع التبرير .

1. (u_n) متتالية عددية تحقق العلاقة : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{3}(n^2 + n)$

أ) (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{3}$ ، ب) (u_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ ، جـ) (u_n) ليست حسابية وليست هندسية

2. لتكن الدالة F حيث : $F(x) = x(\ln x)^2 - x\ln x + x$ هي أصلية للدالة على المجال $]0; +\infty[$:

أ) $x \mapsto 2 + \ln x$ ، ب) $x \mapsto (\ln x)^2 - \ln x + 2$ ، جـ) $x \mapsto (\ln x)^2 + \ln x$

3. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 2x + \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته :

أ) $y = 2x$ ، ب) $y = 2x - \ln 2$ ، جـ) $y = 2x + \ln 2$

4. قسم به 20 تلميذ أكفاء ، نختار 3 تلاميذ لأداء وظائف مختلفة (طبيب و مهندس وباحث)

كم عدد المجموعات التي يمكن إنشاؤها :

أ) 3560 ، ب) 6840 ، جـ) 3420

التمرين 02 (5 نقاط) — 32 دقيقة

كيس به خمس كريات بيضاء تحمل الأرقام: 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام : 0 ، 2 ، 2

وكريتين خضراوتين تحملان الرقمين : 0 ، 3 حيث كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس

نسحب من الكيس عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد .

1. أحسب إحتمال كل من الحدثين التاليين :

A " كرية واحدة فقط بيضاء " ، B" مجموع الأعداد المسجلة على الكريات الثلاث مضاعف لـ 5 " .

2. أحسب إحتمال $P(A \cap B)$ ، ثم إستنتج $P(A \cup B)$

3. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس

أ/ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

ب/ عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

جـ / أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

لا يهم سيرك البطئ المهم أن
تترك أثرا ورائك

4 أحسب $P(e^{2x} - e^2 > 0)$

شر عيوبنا إهتمامنا بعيوب الناس

التمرين 03 (04 نقاط) 45 دقيقة

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ 4u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1 أحسب u_2 و v_0 .

2 بين أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، أكتب v_n بدلالة n .

3 عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

4 عبر عن u_n بدلالة n ، ثم إستنتج نهاية (u_n)

التمرين 04 (07 نقاط) 75 دقيقة

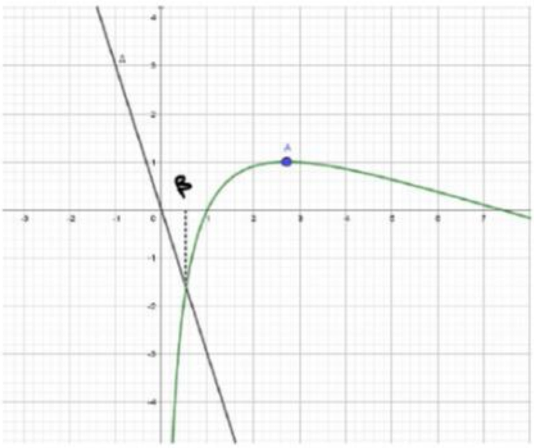
I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = a(\ln x)^2 + bln(x)$

حيث a و b عددان حقيقيان

و (C_g) تمثيلها البياني في معلم $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ و (Δ) المستقيم ذا

المعادلة $y = -3x$ كما هو مبين في الشكل التالي

النقطة $A(e; 1)$ نقطة حدية (ذروة) للمنحني (C_g)



1 أ/ عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

ب/ تأكد من المعطيات السابقة أن : $a = -1$ و $b = 2$

2 عين بيانيا وضعية (C_g) و (Δ). (β هي فاصلة (C_g) و (Δ))

3 إستنتج إشارة $h(x)$ حيث : $h(x) = g(x) + 3x$ على المجال $]0; +\infty[$.

II- f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 3\ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1 بين أن : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3 بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث : $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$

4 تأكد أن : $\ln(\alpha) = -3\alpha$

أنشئ (C_f) و (Δ) ، يعطى : $\beta = 0{,}5$ و $f(\beta) = -1{,}2$

5 أحسب مشتقة الدالة : $x \to xln(x) - x$ ثم بين أن مساحة الحيز المستوي S_α المحدد بالمنحني (C_f)

والمستقيمات ذات المعادلات : $y = 0$ و $x = \alpha$ و $x = 1$ هي $S_\alpha = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)u_a$

الحل المفصل للإختبار التجريبي، 3 علوم

التمرين 01

① نحسب الحدود الأولى فنجد :

$n=0 \Rightarrow u_0 = \frac{1}{3}(0^2+0) \Rightarrow \boxed{u_0 = 0}$

$n=1 \Rightarrow u_0+u_1 = \frac{1}{3}(1^2+1) \Rightarrow u_0+u_2 = \frac{2}{3}$

ومنه $\boxed{u_1 = \frac{2}{3}}$

$n=2 \Rightarrow u_0+u_1+u_2 = \frac{1}{3}(2^2+2) = 2$

$0 + \frac{2}{3} + u_2 = 2 \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{4}{3}}$

نرتب الحدود

$u_0 = 0 \; ; \; u_1 = \frac{2}{3} \; ; \; u_2 = \frac{4}{3}$

بما أن $u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = \frac{2}{3}$

فإن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{2}{3}$

ومنه الإجابة الصحيحة هي (أ)

② نشتق الدالة الأصلية F نجد :

$F(x) = x(\ln x)^2 - x\ln x + x$

$F'(x) = (\ln x)^2 + 2x\left(\frac{1}{x}\right)\ln x - \left(\ln x + \frac{1}{x}x\right) + 1$

$= (\ln x)^2 + 2\ln x - \ln x - \cancel{1} + \cancel{1}$

$\boxed{F'(x) = (\ln x)^2 + \ln x}$

ومنه الإجابة الصحيحة هي (ج)

③ لدينا

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{2x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = -\ln 2$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x + \ln 2] = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x - \ln 2)] = 0$

ومنه $y = 2x - \ln 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ومنه الإجابة الصحيحة هي (ب)

④ بما أن الوظائف محددة نستخدم الترتيبية A_n^p

$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \boxed{6840}$

ومنه الإجابة الصحيحة هي (ب)

تمرين 2

عدد الحالات الممكنة للسحب

$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \times 7!} = \boxed{120}$

① حساب $P(A)$

A " كرية واحدة بيضاء فقط "

$(B \bar{B} \bar{B})$

$P(A) = \frac{C_5^1 C_5^2}{120} = \boxed{\frac{50}{120}}$

حساب $P(B)$

B " مجموع الأعداد المسجلة مضاعف لـ 5 "

$(0,0,0)$ أو $(0,2,3)$ أو $(1,2,2)$ أو $(1,1,3)$

$P(B) = \frac{C_4^3 + C_4^1 C_2^1 C_1^1 + C_3^1 C_2^2 + C_3^2 C_1^1}{120} = \boxed{\frac{18}{120}}$

② حساب $P(A \cap B)$

$A \cap B$ " مجموع الأعداد المسجلة على الكريات الثلاث مضاعف لـ 5 ومن بينهم كرة واحدة فقط بيضاء "

$B_0 + R_0 + V_0 = 0$

$B_0 + R_2 + V_3 = 5$

$B_1 + R_2 + R_2 = 5$

$P(A \cap B) = \frac{(C_2^1 C_1^1 C_1^1) + (C_2^1 C_2^1 C_1^1) + (C_3^1 \times C_2^2)}{120} = \boxed{\frac{9}{120}}$

استنتاج $P(A\cup B)$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$= \frac{50}{120}+\frac{18}{120}-\frac{9}{120}$$
$$P(A\cup B) = \boxed{\frac{59}{120}}$$

3) 1) قيم المتغير X

$$X=\{0;1;2;3\}$$

قانون احتماله

$X=0$ معناه سحب ثلاث كرات حمراء

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{120}=\boxed{\frac{1}{120}}$$

$X=1$ معناه سحب كريتين حمراوين وكرية ليست حمراء $(R\,R\,\bar{R})$

$$P(X=1)=\frac{C_3^2\,C_7^1}{120}=\boxed{\frac{21}{120}}$$

$X=2$ معناه سحب كرية حمراء وكريتين ليستا حمراوين $(R\,\bar{R}\,\bar{R})$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\,C_7^2}{120}=\boxed{\frac{63}{120}}$$

$X=3$ معناه عدم سحب أي كرة حمراء $(\bar{R}\,\bar{R}\,\bar{R})$

$$P(X=3)=\frac{C_3^0\,C_7^3}{120}=\boxed{\frac{35}{120}}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

حساب الأمل الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n=4} x_i P_i$$

$$=\frac{(0\times 1)+(1\times 21)+(2\times 63)+(3\times 35)}{120}$$

$$\boxed{E(X)=2{,}1}$$

حساب $P(e^{2x}-e^{2}>0)$

$$e^{2x}-e^{2}>0$$
$$e^{2x}>e^{2}$$
$$2x>2 \Rightarrow x>1$$

ومنه قيم X هي $\{2;3\}$

$$P(e^{2x}-e^{2}>0)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{63}{120}+\frac{35}{120}=\boxed{\frac{98}{120}}$$

تمرين 3

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{4}\ ;\ u_1=\frac{1}{2} \\ 4u_{n+2}=7u_{n+1}-3u_n \end{cases}$$

$$v_n=u_{n+1}-u_n$$

1) حساب u_2 و v_0

$$4u_{0+2}=7u_{0+1}-3u_0$$
$$4u_2=7u_1-3u_0$$
$$4u_2=7\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$u_2=\frac{\frac{7}{2}-\frac{3}{4}}{4}=\boxed{\frac{11}{16}}$$

$$v_0=u_{0+1}-u_0$$
$$v_0=u_1-u_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$
$$\boxed{v_0=\frac{1}{4}}$$

2) بين أن (v_n) متتالية هندسية $q=\frac{3}{4}$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{7u_{n+1} - 3u_n}{4} - u_{n+1}$$

$$= \frac{7u_{n+1} - 3u_n - 4u_{n+1}}{4} = \frac{3u_{n+1} - 3u_n}{4}$$

$$= \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) = \boxed{\frac{3}{4} v_n}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

حدها الأول $v_0 = \frac{1}{4}$

كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n \Rightarrow v_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

التعبير عن S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

وهي حدود متتابعة لمتتالية هندسية ومنه

$$S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$S_n = -\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right) = \boxed{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

التعبير عن u_n بدلالة n

$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_2 = u_3 - u_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$$S_n = \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \dots + u_n - \cancel{u_{n-1}}$$

$$S_n = -u_0 + u_n$$

ولدينا من جهة أخرى $S_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ومنه $-u_0 + u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + u_0$$

$$u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{u_n = \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

استنتاج نهاية u_n

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{4} - \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{0} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

لأن $-1 < \frac{3}{4} < 1$

تمرين 4:

$$g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x$$

① عين $g'(x)$ بدلالة a و b

$$g'(x) = 2a\left(\frac{1}{x}\right)\ln x + b\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\frac{1}{x}(2a\ln x + b)}$$

ب) تأكد أن $a = -1$ و $b = 2$

*) بما أن $A(e;1)$ ذروة فإن $g'(e) = 0$

$$\frac{1}{e}(2a\ln e + b) = 0 \Rightarrow \frac{1}{e}(2a + b) = 0$$

$$2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2a} \text{ --- } ①$$

*) (C_g) يشمل $A(e;1)$ فإن $g(e) = 1$

$$a(\ln e)^2 + b\ln e = 1$$

$$\boxed{a + b = 1} \text{ --- } ②$$

بتعويض ① في ② نجد

$$a - 2a = 1 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

بالتعويض نجد

$$b = -2(-1) \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

ومنه $g(x) = -(\ln x)^2 + 2\ln x$

ج) وضعية (C_g) و (Δ) بيانيا

x	0		β		$+\infty$
الوضع النسبي	||	(C_g) تحت (Δ)	(C_g) يقطع (Δ)	(C_g) فوق (Δ)	

③ استنتاج إشارة $h(x)$

$$h(x) = g(x) + 3x$$

$$= g(x) - (-3x)$$

لاحظ أن إشارة $h(x)$ لها علاقة بالوضع النسبي بين (C_g) والمستقيم (Δ)

x	0		β		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$	

II) $f(x) = 3\ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$

① بين أن $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim_{x \to 0^{>}} \underbrace{\ln x}_{-\infty}\left(3 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{-\infty}\right) = \boxed{+\infty}$$

تفسير النتيجة

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\ln x}_{+\infty}\left(3 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}\right) = \boxed{+\infty}$$

② ④ بين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{\left(2\left(\frac{1}{x}\right)\ln x\right)(x) - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{3}{x} + \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{3x + 2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{3\cancel{x} + \cancel{h}(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

اتجاه التغير

إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$ ومنه

f متزايدة على المجال $[\beta ; +\infty[$

ومتناقصة على المجال $]0 ; \beta]$

جدول التغيرات

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

③ بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلين

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3\ln x + \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$$\ln x\left[3 + \frac{\ln x}{x}\right] = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = 0 \\ \text{أو} \\ 3 + \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ \text{أو} \\ 3 + \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

وهذه الأخيرة هي التي تقبل الحل المطلوب إثباته وهو الذي يحقق $0,3 < \alpha < 0,4$

f مستمرة ورتيبة على المجال $[0,3 ; 0,4]$

و $\begin{cases} f(0,3) \simeq 1,22 \\ f(0,4) \simeq -0,65 \end{cases} \Rightarrow f(0,3) \times f(0,4) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

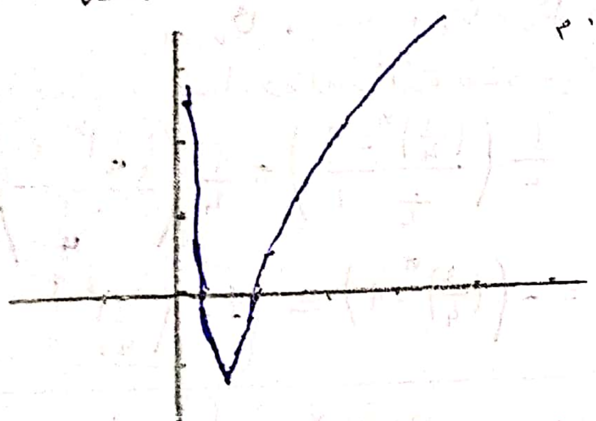
$$0,3 < \alpha < 0,4$$

④ تأكد أن $\ln\alpha = -3\alpha$

$$3 + \frac{\ln\alpha}{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha} = -3$$

$$\ln\alpha = -3\alpha$$

و.ه.م



⑤ المشتقة $(x\ln x - x)' = \ln x$

حساب S_α

$$S_\alpha = -\int_\alpha^1 f(x)\,dx = \int_1^\alpha f(x)\,dx$$

$$= \int_1^\alpha \left(3\ln x + \frac{1}{x}(\ln x)^2\right) dx$$

$$= \left[3(x\ln x - x) + \frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^\alpha$$

$$= \left[3\alpha\ln\alpha - \alpha + \frac{1}{3}(\ln\alpha)^3\right] - \left[3(1\ln 1) + \frac{1}{3}(\ln 1)^3\right]$$

$$= \left[3(-3\alpha^2 - \alpha) - 9\alpha^3\right] - \left[3(-1)\right]$$

$$= -9\alpha^2 - 3\alpha - 9\alpha^3 + 3$$

$$= (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)\ u.a$$

و.ه.م